تمارين الهندسة في الفضاء

التمرين01

التعامد و التوازي - المسافة بين نقطة و مستو .

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k})$ ، **تمثيلا وسيطيا لمستقيم** (D)

و معادلة ديكارتية لمستو (P) **:**

$(D):\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = -3-\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ و $(P): x+2y-3z-1=0$.

اختر الجواب الصحيح في كل سطر من الجدول التالي :

	الجواب (أ)	الجواب (ب)	الجواب (جـ)
السطر1	$A(-1;3;2)\in(D)$	$B(2;-1;-1)\in(D)$	$C(3;1;-4)\in(D)$
السطر2	$\vec{u}(1;2;3)$ هو شعاع توجيه لـ: (D)	$\vec{v}(-2;1;1)$ هو شعاع توجيه لـ: (D)	$\vec{w}(3;1;4)$ هو شعاع توجيه لـ: (D)
السطر3	(D)محتواة في (P)	(D)يوازي تماما (P)	(D)يثقب (P)
السطر4	$A'(1;3;-2)\in(P)$	$B'(1;3;2)\in(P)$	$C'(1;3;-1)\in(P)$
السطر5	المستوي (Q_1) الذي معادلته $x+2y-3z+1=0$ يعامد المستوي (P)	المستوي (Q_2) الذي معادلته $-4x+5y+2z+3=0$ يعامد المستوي (P)	المستوي (Q_3) الذي معادلته $-3x+2y-z-1=0$ يعامد المستوي (P)
السطر6	المسافة بين النقطة $M_1(-1;-3;2)$ و المستوي (P) هي $\sqrt{14}$	المسافة بين النقطة $M_1(-1;-3;2)$ و المستوي (P) هي 14	المسافة بين النقطة $M_1(-1;-3;2)$ و المستوي (P) هي $2\sqrt{3}$

التمرين 02

معادلة ديكارتية لمستو ، تمثيل وسيطي لمستقيم - المرجح - المسافة بين نقطة و مستو

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $2x+y-2z+4=0$ و النقط $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ و $C(4;-2;5)$.

1) بيّن أن النقط A ، B و C تعيّن مستو و بيّن أن هذا المستوي هو (P).

2) (2-1) بيّن أن المثلث ABC قائم.

(2-2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل O و يعامد المستوي (P).

(2-3) نسمي K المسقط العمودي للنقطة O على (P). احسب المسافة OK .

(2-4) احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.

3) نسمي G مرجح الجملة $\{(O;3),(A;1),(B;1),(C;1)\}$.

(3-1) I هي مركز ثقل المثلث ABC. بيّن أن G تنتمي إلى (OI).

(3-2) عيّن المسافة بين G و المستوي (P).

التمرين 03

الاستقامية - مستقيم يعامد مستو – معادلة مستو - تقاطع مستقيم و مستقيم - المرجح - مجموعة نقطية .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط A (2 ; 1 ; 3) ، B(-3;-l;7) و C(3;2;4) .

1) بيّن أن A و B و C ليست على استقامة واحدة.

2) $(t\in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \\ z=4+t \end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (d).

(2-1) بيّن أن (d) يعامد المستوي (ABC) .

(2-2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3) H هي تقاطع (d) و (ABC) .

(3-1) بيّن أن H هي مرجح الجملة $\{(A;-2),(B;-1),(C;2)\}$.

(3-2) عيّن الطبيعة و العناصر المميّزة للمجموعة (Γ_1) للنقط M من الفضاء حيث :

$$\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\bullet\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$$

(3-3) عيّن الطبيعة و العناصر المميّزة للمجموعة (Γ_2) للنقط M من الفضاء حيث :

$$\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$$

التمرين 04

المسافة بين نقطة و مستو - تقاطع مستو و كرة .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k})$.

الجزء الأول

a, b, c و d أعداد حقيقية حيث $(a, b, c) \neq (0 ; 0 ; 0)$.

(P) هو المستوي الذي معادلته $ax + by + cz + d = 0$.

نعتبر النقطة $I(x_I;y_I;z_I)$ و الشعاع $\vec{n}(a;b;c)$.

الهدف في هذا الجزء الأول هو البرهان على أن المسافة بين I و المستوي (P) تساوي:

$$\frac{|a\,x_I + b\,y_I + c\,z_I + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

1) (Δ) هو المستقيم الذي يمر بالنقطة I و يعامد (P).

عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) بدلالة $a , b, c , d , x_I , y_I, z_I$.

2) نسمي H نقطة تقاطع (Δ) و (P) .

(1-2) بيّن أنه يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$.

(2-2) عبرعن k بدلالة $a , b, c , d , x_I , y_I, z_I$.

(3-2) استنتج أن : $\frac{|a\,x_I + b\,y_I + c\,z_I + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

الجزء الثاني

المستوي (Q) الذي معادلته $x - y + z - 11 = 0$ يمس الكرة (S) التي مركزها $\Omega(1;-1;3)$.

1) عيّن نصف قطر الكرة (S) .

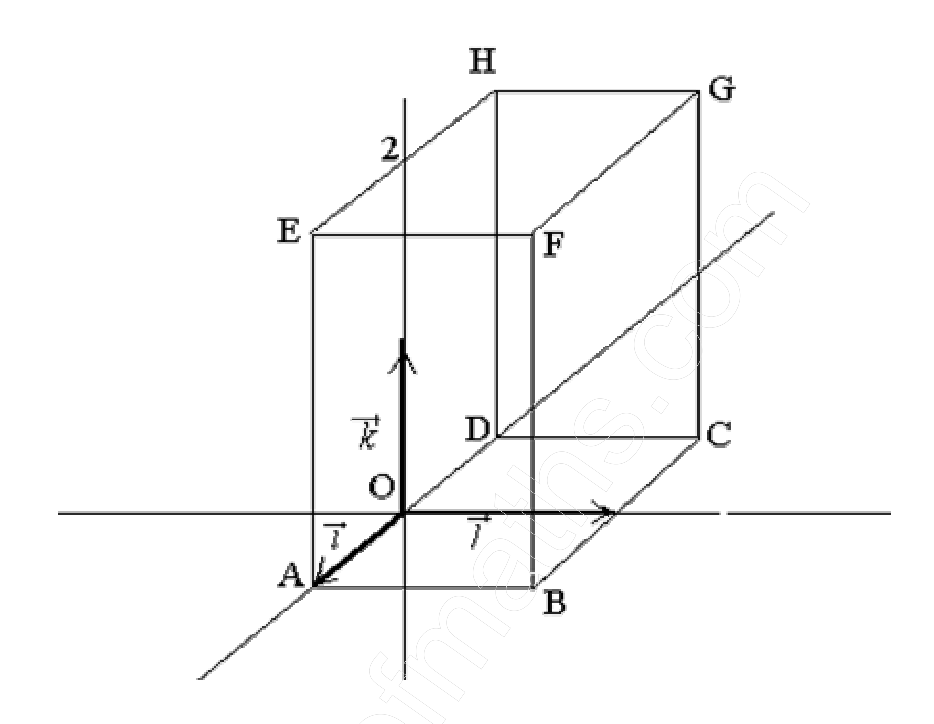
2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل Ω و يعامد (Q) .

3) استنتج احداثيات نقطة تقاطع (S) و (Q).

التمرين 05

معادلة ديكارتيّة لمستو - تمثيل وسيطي لمستقيم - تقاطع مستقيمات .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.



يمثل الشكل السابق متوازي مستطيلات، O هي منتصف [AD] ، P هي منتصف [EF] .

1) (1-1) ما هي مجموعة نقط الفضاء التي معادلتها z = 2 ؟

(2-1) عيّن معادلة للمستوي (ABF) .

(3-1) استنتج جملة معادلتين تميّز المستقيم (EF) .

2) (1-2) عيّن إحداثيات النقط A، G و P.

(2-2) ارسم النقطة $Q\left(0;\frac{1}{2};0\right)$.

(3-2) اكتب معادلة للمستوي (APQ) .

3) (1-3) ارسم القطعتين [PQ] و [AG] .

(2-3) هل $G \in (APQ)$ ؟ علل.

4) ننشئ الشكل السابق باستعمال برمجية للهندسة ثم نطلب تمثيل نقطة تقاطع (AG) و (PQ).

ما هو الجواب الذي تتوقعه؟

التمرين 06

معادلة ديكارتية لمستو - تمثيل وسيطي لمستقيم - المسافة بين نقطة و مستو – تقاطع مستو و كرة .

عيّن في كل حالة مما يلي الجواب الصحيح .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقطة S(1 ; -2 ; 0) و المستوي (P) الذي معادلته

$x + y - 3z + 4 = 0$.

1) تمثيل وسيطي للمستقيم (D) الذي يمر بالنقطة S و يعامد (P) هو :

الجواب1	الجواب2	الجواب3	الجواب4
$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

2)إحداثيات النقطة H تقاطع المستقيم (D) مع المستوي (P) هي :

الجواب1	الجواب2	الجواب3	الجواب4
$(-4;0;0)$	$\left(\frac{6}{5};\frac{-9}{5};\frac{-3}{5}\right)$	$\left(\frac{7}{9};\frac{-2}{3};\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{8}{11};\frac{-25}{11};\frac{9}{11}\right)$

3) المسافة بين النقطة S و المستوي (P) تساوي :

الجواب1	الجواب2	الجواب3	الجواب4
$\frac{\sqrt{11}}{3}$	$\frac{3}{\sqrt{11}}$	$\frac{9}{\sqrt{11}}$	$\frac{9}{11}$

4) نعتبر الكرة التي مركزها S و نصف قطرها 3 . تقاطع هذه الكرة و المستوي (P) هي:

الجواب 1 : النقطة $I(1;-5;0)$

الجواب 2 : الدّائرة التي مركزها H و نصف قطرها $3\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$

الجواب 3 : الدّائرة التي مركزها S و نصف قطرها 2

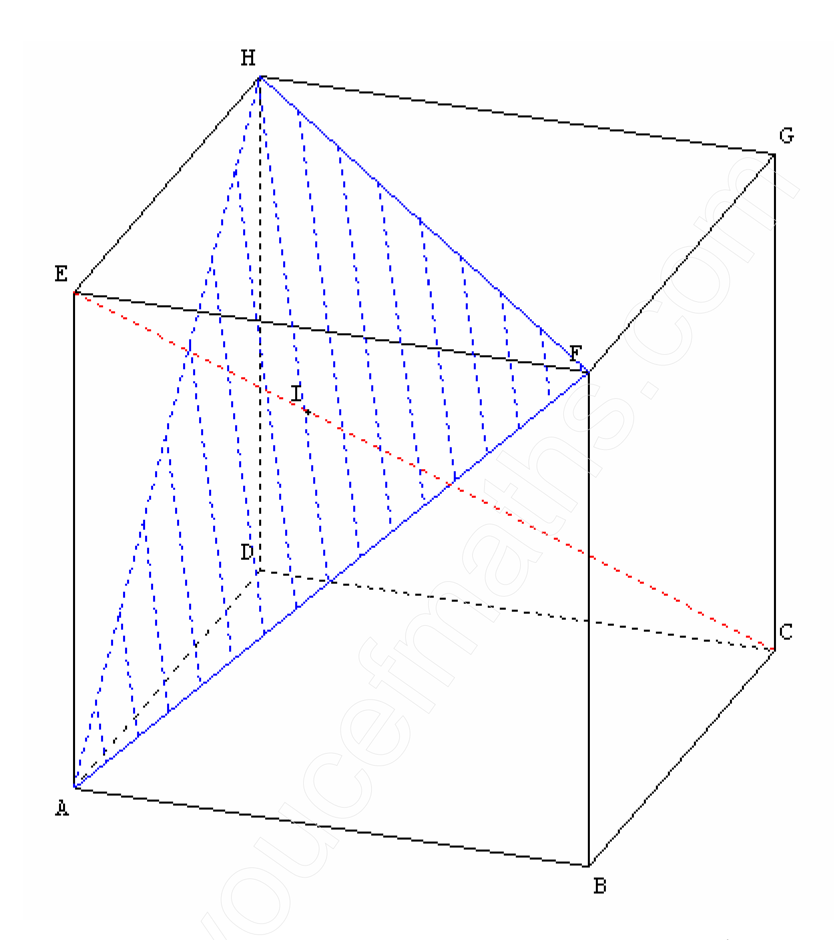
الجواب 4 : الدّائرة التي مركزها S و نصف قطرها $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$

التمرين 07

الجداء السلمي - التعامد .

ABCDEFGH مكعب طول حرفه a (a عدد حقيقي موجب تماما).

نسمي I نقطه تقاطع المستقيم (EC) و المستوي (AFH) .



1) (HF)بيّن أن المستقيم يعامد المستقيم (AG).

2) (1-2) احسب بدلالة a الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AF} \bullet \overrightarrow{EA}$ ، $\overrightarrow{AF} \bullet \overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AF} \bullet \overrightarrow{BC}$.

(2-2) استنتج أن $\overrightarrow{EC}$ يعامد $\overrightarrow{AF}$.

التمرين 08

الجداء السلمي - التعامد - أقصر مسافة بين مستقيمين .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر المستقيمين :

$$(D_1):\begin{cases} x = 3-4\alpha \\ y = -2+\alpha \\ z = -1+\alpha \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{و} \quad (D_2):\begin{cases} x = -6\beta \\ y = 1+\beta \\ z = 2+2\beta \\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1)عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تاذي يعامد (D_1) و (D_2) .

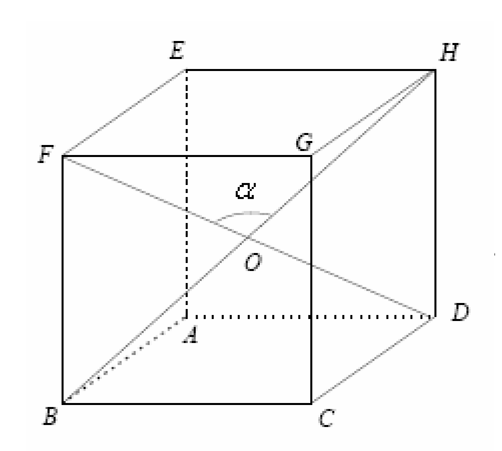
2) احسب أقصر مسافة بين المستقيمين (D_1) و (D_2) .

التمرين 09

الجداء السلمي - التعاهد - المسافة بين نقطة و مستو .

$ABCDEFGH$ مكعب مركزه O و طول حرفه 1 .

نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1) احسب FD و BH .

2) احسب قيمة مقربة للزاوية $\alpha = HOF$.

3) برهن أن المستقيم (FD) يعامد المستوي (EGB)

4) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (EGB) .

5) احسب المسافة بين النقطة O و المستوي (EGB)

حلول

التمرين 01

- **في السطر 1 : الجواب الصحيح هو الجواب (جـ)** ($C(3;1;-4)\in(D)$) ، لأنه يوجد عدد حقيقي λ حيث $\begin{cases}3=1+2\lambda\\1=2-\lambda\\-4=-3-\lambda\end{cases}$ $(\lambda=1)$.
- **في السطر 2 : الجواب الصحيح هو الجواب (ب)** لأن :

التمثيل الوسيطي المعطى $\begin{cases}x=1+2\lambda\\y=2-1\lambda\\z=-3-1\lambda\end{cases}$ يبيّن أن $\vec{r}(2;-1;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (D) و $\vec{v}(-2;1;1)$ يوازي $\vec{r}(2;-1;-1)$ لأنه يوجد عدد حقيقي t حيث $\vec{r}=t\vec{v}$ $(t=-1)$.

$\vec{v}(-2;1;1)$ هو شعاع توجيه آخر للمستقيم (D).

- **في السطر 3 : الجواب الصحيح هو الجواب (جـ)** لأن :

$\vec{r}(2;-1;-1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D)

$\vec{n}(1;2;-3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)

لدينا $\vec{r}\bullet\vec{n}\neq 0$ إذن $\vec{r}$ لا يعامد $\vec{n}$ و منه (D) لا يوازي (P)

((D) لا يوازي (P) تماما و ليس محتواة في (P))

ملاحظة: نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء تنتمي إلى (P) و إلى (D) إذا و فقط إذا كان

$\begin{cases}x+2y-3z-1=0\\\begin{cases}x=1+2\lambda\\y=2-\lambda\\z=-3-\lambda\end{cases}\end{cases}$ أي $\begin{cases}(1+2\lambda)+2(2-\lambda)-3(-3-\lambda)-1=0\\\begin{cases}x=1+2\lambda\\y=2-\lambda\\z=-3-\lambda\end{cases}\end{cases}$ أي $\begin{cases}\lambda=-\frac{13}{3}\\\begin{cases}x=-\frac{23}{3}\\y=\frac{19}{3}\\z=\frac{4}{3}\end{cases}\end{cases}$

إذن (D) يثقب (P) في النقطة التي إحداثيتها $\left(-\frac{23}{3};\frac{19}{3};\frac{4}{3}\right)$.

- **في السطر 4 : الجواب الصحيح هو الجواب (ب)** لأن الاحداثيات $(1;3;2)$ للنقطة B' تحقق معادلة المستوي (P) (التي هي $x+2y-3z-1=0$).

• **في السطر5 :** الجواب الصحيح هو **الجواب (ب)** لأن:

$\vec{n}(1;2;-3)$ هو شعاع ناظمي لـلمستوي (P)

$\vec{n}_2(-4;5;2)$ هو شعاع ناظمي لـلمستوي (Q_2)

و $\vec{n}\bullet\vec{n_1}=0$ إذن $\vec{n}$ يعامد $\vec{n_2}$ ، نستنتج أن (Q_2) يعامد (P) .

• **في السطر6 :** الجواب الصحيح هو **الجواب (أ)** لأن:

المسافة بين النقطة $M_1(-1;-3;2)$ و المستوي الذي معادلته $1x+2y-3z-1=0$ هي

$$\frac{|1\times(-1)+2\times(-3)-3\times(2)-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{|-14|}{\sqrt{14}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\frac{14\sqrt{14}}{14}=\sqrt{14}$$.

التمرين 02

1) **نبيّن أن النقط** A ، B **و** C **تعيّن مستو**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;0;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-4;-1)$.

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ تكافئ $\begin{cases}-2=k\\0=-4k\\-2=k\end{cases}$ أي $\begin{cases}k=-2\\k=0\\k=-2\end{cases}$

لا يمكن للعدد الحقيقي k أن يكون 0 و -2 في آن واحد إذن لا يوجد أي عدد k حيث $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ و منه $\overrightarrow{AB}$ لا يوازي $\overrightarrow{AC}$، نستنتج أن النقط A ، B و C تعيّن مستو، هو المستوي(ABC) .

نبيّن أن هذا المستوي هو (P)

2 x **3** +**2** -2 x **6** + 4 = 0 إذن النقطة A تنتمي إلى (P).

2 x **1** +**2** -2 x **4** + 4 = 0 إذن النقطة B تنتمي إلى (P).

2 x **1** +**2** -2 x **4** + 4 = 0 إذن النقطة C تنتمي إلى (P).

النقط A ، B و C تنتمي إلى (P)، إذن المستوي (P) هو المستوي (ABC) .

2) (2-1) **نبيّن أن المثلث ABC قائم**

لدينا $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=(-2)\times1+0\times(-4)+(-2)\times(-1)=0$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان إذن المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان و منه المثلث ABC قائم في A .

(2-2) تمثيل و سيطي للمستقيم (Δ)

بصفة عامة $\vec{n}(a;b;c)$ يعامد المستوي الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$.

لدينا $\vec{n}(2;1;-2)$ يعامد (P) و هو أيضا شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

$M(x;y;z)\in(\Delta)$ تكافئ $\overrightarrow{OM}=\lambda\vec{n}$ إذن $\begin{cases}x=2\lambda\\y=\lambda\\z=-2\lambda\end{cases}$ و $\lambda\in\mathbb{R}$

(3-2) حساب المسافة OK

لدينا (OK) ⊥ (P) و (OK) = (Δ). النقطة K تنتمي إلى (P) و إلى (Δ) إذن

$$\begin{cases}\begin{cases}x=2\lambda\\y=\lambda\\z=-2\lambda\end{cases}\\2x+y-2z+4=0\end{cases}$$ أي $$\begin{cases}\begin{cases}x=2\lambda\\y=\lambda\\z=-2\lambda\end{cases}\\4\lambda+\lambda+4\lambda+4=0\end{cases}$$ أي $$\begin{cases}\begin{cases}x=2\lambda\\y=\lambda\\z=-2\lambda\end{cases}\\\lambda=-\frac{4}{9}\end{cases}$$

و أخيرا $\begin{cases}\begin{cases}x=-\frac{4}{9}\\y=\frac{4}{9}\\z=\frac{8}{9}\end{cases}\\\lambda=-\frac{4}{9}\end{cases}$ نجد عندئذ إحداثيات K : $K\left(-\frac{8}{9};-\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$.

نستنتج حساب OK : $OK=\sqrt{\left(-\frac{8}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2}=\frac{4}{3}$

(4-2) حساب حجم رباعي الوجوه $OABC$

قاعدة رباعي الوجوه $OABC$ هي ABC و ارتفاعه [OK].

لدينا $AB^2=4+4=8$ إذن $AB=2\sqrt{2}$ و نجد كذلك $AC=3\sqrt{2}$.

مساحة المثلث ABC هي : $Aire(ABC)=\frac{AB\times AC}{2}=6cm^2$

نستنتج حجم رباعي الوجوه **OABC** : $Volume(OABC)=\frac{6\times OK}{3}=\frac{8}{3}cm^3$

3) (3-1) نبيّن أن G **تنتمي إلى** (OI)

" I مركز ثقل المثلث ABC" يعني " I مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;1)\}$"

G هي مرجح الجملة $\{(O;3),(A;1),(B;1),(C;1)\}$.

نستعمل خواص المرجح (التجميعية): G هي مرجح الجملة $\{(O;3),(I;3)\}$

أي G هي منتصف [OI] إذن G تنتمي إلى المستقيم (OI) .

(2-3) حساب المسافة بين G و المستوي (P)

لدينا $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\right)$ إذن إحداثيات I هي $\begin{cases} x_I=\frac{8}{3} \\ y_I=\frac{2}{3} \\ z_I=5 \end{cases}$

G هي منتصف [OI] إذن $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$ ، نستنتج إحداثيات G : $\begin{cases} x_G=\frac{4}{3} \\ y_G=\frac{1}{3} \\ z_G=\frac{5}{2} \end{cases}$

$2x+y-2z+4=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P)، المسافة بين G و المستوي (P)

هي $\frac{|2x_G+y_G-2z_G+4|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{2}{3}$.

التمرين 03

1) A و B و C ليست على استقامة واحدة

لدينا $\overrightarrow{AB}(-5;-2;4)$ و $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$.

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ تكافئ $\begin{cases} -5=k \\ -2=k \\ 4=k \end{cases}$

لا يمكن للعدد الحقيقي k أن يكون -5 ، -2 و 4 في آن واحد إذن لا يوجد أي عدد k حيث $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ و منه $\overrightarrow{AB}$ لا يوازي $\overrightarrow{AC}$، نستنتج أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

2) (1-2) (d) يعامد المستوي (ABC)

نعيّن شعاعا $\vec{n}(\alpha;\beta;\gamma)$ يعامد المستوي (ABC)

$\vec{n}(\alpha;\beta;\gamma)\perp\overrightarrow{AB}(-5;-2;4)$ **و** $\vec{n}(\alpha;\beta;\gamma)\perp\overrightarrow{AC}(1;1;1)$

إذن $\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}-5\alpha-2\beta+4\gamma=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}-5(-\beta-\lambda)-2\beta+4\gamma=0\\ \alpha=-\beta-\gamma\end{cases}$

إذن $\begin{cases}3\beta+9\gamma=0\\ \alpha=-\beta-\gamma\end{cases}$ أي $\begin{cases}\beta=-3\gamma\\ \alpha=2\gamma\end{cases}$ و منه $\vec{n}(2\gamma;-3\gamma;\gamma)$.

لاحظ أن $\vec{v}(2;-3;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (d) (انظر التمثيل الوسيطي المعطى للمستقيم (d)).

$\vec{v}(2;-3;1)$ يعامد أيضا المستوي (ABC) ، إذن (d) يعامد (ABC) .

(2-2) معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

$M(x;y;z)$ تنتمي إلى (ABC) إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AM}\perp\vec{v}$ **أي** $\overrightarrow{AM}\bullet\vec{v}=0$ **.**

لدينا $\overrightarrow{AM}(x-2;y-1;z-3)$ **و** $\vec{v}(2;-3;1)$ ، إذن **:**

$M(x;y;z)$ تنتمي إلى (ABC) إذا و فقط إذا كان

$$2(x-2)-3(y-1)+(z-3)=0$$

أي $2x-3y+z-4=0$ **.**

$2x-3y+z-4=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) **.**

3) (1-3) H هي مرجح الجملة $\{(A;-2),(B;-1),(C;2)\}$

- H(*x*;*y*;*z*) تنتمي إلى (ABC) و إلى (d) إذن إحداثياتها تحقق :

$\begin{cases}2x-3y+z-4=0\\ \begin{cases}x=-7+2t\\ y=-3t\\ z=4+t\end{cases}\end{cases}$ **أي** $\begin{cases}2(-7+2t)-3(-3t)+(4+t)-4=0\\ \begin{cases}x=-7+2t\\ y=-3t\\ z=4+t\end{cases}\end{cases}$

أي $\begin{cases}t=1\\ \begin{cases}x=-7+2t=-5\\ y=-3t=3\\ z=4+t=5\end{cases}\end{cases}$ و منه. H (-5 ; -3 ;5) .

- لدينا $\overrightarrow{HA}(7;4;-2)$ ، $\overrightarrow{HB}(2;2;2)$ ، $\overrightarrow{HC}(8;5;-1)$ إذن :
$-2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ ، نستنتج أن H هي مرجح الجملة
$\{(A;-2),(B;-1),(C;2)\}$

(2-3) (المجموعة (Γ_1)

- H هي مرجح الجملة $\{(A;-2),(B;-1),(C;2)\}$ إذن :
$-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MH}$
- $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CB}$

إذن M تنتمي إلى Γ_1 إذا و فقط إذا كان $-\overrightarrow{MH}\bullet\overrightarrow{CB}=0$ ، نستنتج (Γ_1) هي المستوي الذي يشمل النقطة H و $\overrightarrow{BC}$ هو شعاع ناظمي له.

(3-3) المجموعة (Γ_2)

H هي مرجح الجملة $\{(A;-2),(B;-1),(C;2)\}$ إذن :
$-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MH}$

إذن : M تنتمي إلى (Γ_2) إذا و فقط إذا كان $\left\|\overrightarrow{MH}\right\|=\sqrt{29}$ ، نستنتج أن (Γ_2) هي الكرة التي مركزها H و نصف قطرها $\sqrt{29}$.

التمرين 04

الجزء الأول

1) $\vec{n}(a;b;c)$ هو في نفس الوقت شعاع ناظمي للمستوي (P) و شعاع توجيه للمستقيم (Δ) الذي يشمل I و يعامد (P).

$M(x;y;z)\in(\Delta)$ يكافئ $\overrightarrow{IM}\left(x-x_I\,;y-y_I\,;z-z_I\right)$ يوازي $\vec{n}(a;b;c)$ أي يوجد عدد حقيقي t حيث $\overrightarrow{IM}=t\vec{n}$ ، إذن $\begin{cases}x-x_I=ta\\y-y_I=tb\\z-z_I=tb\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=x_I+ta\\y=y_I+tb\\z=z_I+tb\end{cases}$ ..... $(*)$

الجملة $(*)$ تشك تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) .

2)(1-2) H و I نقطتان من (Δ)،إذن $\overrightarrow{IH}$ يوازي $\vec{n}$ لأن $\vec{n}$ شعاع توجيه لـ: (Δ)
إذن يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{IH}=k\vec{n}$.

(2-2) $\begin{cases}\overrightarrow{IH}=k\vec{n}\\H\in(P)\end{cases}$ إذن $\begin{cases}\begin{cases}x_H=x_I+ka\\y_H=y_I+kb\\z_H=z_I+kb\end{cases}\\ax_H+by_H+cz_H+d=0\end{cases}$

و منه $a(x_I+ka)+b(y_I+ka)+c(z_I+ka)z+d=0$

أي $ax_I+ka^2+by_I+kb^2+cz_I+kc^2+d=0$

أي $k(a^2+b^2+c^2)=-(ax_I+by_I+cz_I+d)$

لدينا $a^2+b^2+c^2\neq 0$ لأن $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ إذن $k=\dfrac{-(ax_I+by_I+cz_I+d)}{(a^2+b^2+c^2)}$ (3-2)

$$\left\|\overrightarrow{IH}\right\|=|k|\times\|\vec{n}\|=|k|\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\left|\frac{-(ax_I+by_I+cz_I+d)}{(a^2+b^2+c^2)}\right|\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

منه $\left\|\overrightarrow{IH}\right\|=\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

الجزء الثاني

المستوي (Q) الذي معادلته $x - y + z - 11 = 0$ مماس للكرة (S) الذي مركزها $\Omega(1;-1;3)$.

4) نصف القطر r للكرة (S) يساوي المسافة بين Ω و (Q)، و بتطبيق نتيجة الجزء الأول ، نجد :

$r=\dfrac{|x_\Omega-y_\Omega+z_\Omega-11|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=2\sqrt{3}$.

2) $\vec{n}(1,-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q).

$M(x;y;z)\in(\Delta)$ يكافئ $\overrightarrow{\Omega M}(x-1;y+1;z-1)$ يوازي $\vec{n}(1;-1;1)$

أي يوجد عدد حقيقي t حيث $\overrightarrow{\Omega M}=t\vec{n}$، إذن أي $\begin{cases}x-1=t\\y+1=-t\\z-3=t\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=t+1\\y=-t-1\\z=t+3\end{cases}$

3) النقطة T تقاطع الكرة (S) والمستوي (Q) هي نقطة تقاطع (Q) و المستقيم (Δ)

إذن إحداثيات T تحقق الجملة : $\begin{cases}\begin{cases}x=t+1\\y=-t-1\\z=t+3\end{cases}\\x-y+z-11=0\end{cases}$ أي

$$\begin{cases}\begin{cases}x=t+1\\y=-t-1\\z=t+3\end{cases}\\(t+1)-(-t-1)+(t+3)-11=0\end{cases}$$

أي $\begin{cases}\begin{cases}x=t+1\\y=-t-1\\z=t+3\end{cases}\\t=2\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=3\\y=-3\\z=5\end{cases}$ إذن $T(3;-3;5)$.

التمرين 05

1) (1-1) مجموعة النقط M(x ; y ; z) من الفضاء حيث z = 2 هي المستوي الذي يمر بالنقطة التي إحداثياتها (2 ; 0 ; 0) و يوازي المستوي(xOy)، هو المستوي (EFH) .

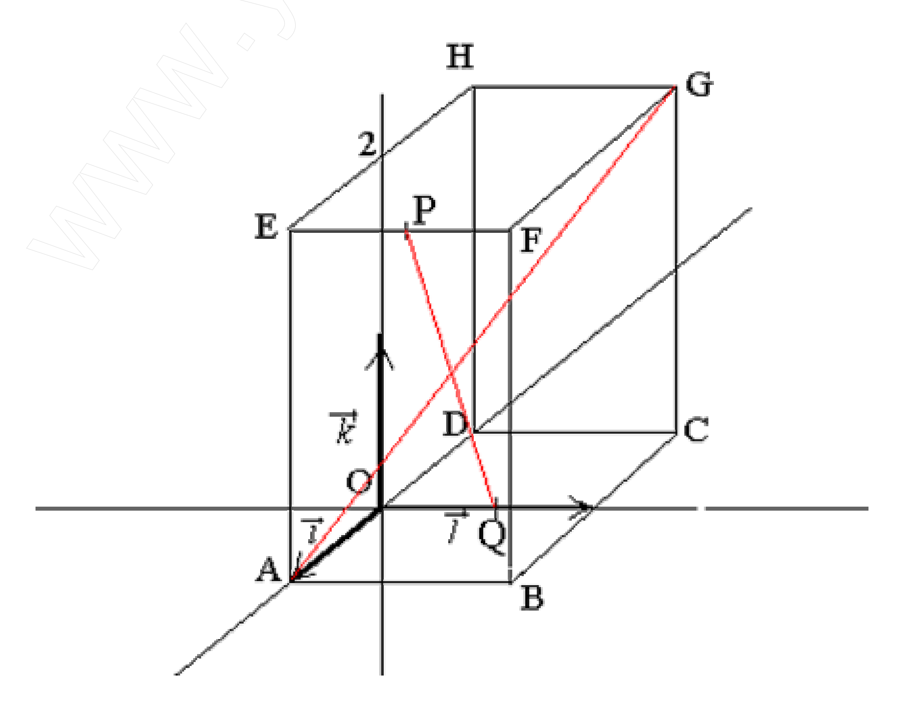
(2-1) للنقط A ، B و F نفس الفاصلة 1، إذن $M(x;y;z)\in(ABF)$ يكافئ x = 1 معادلة المستوي (ABF) هي x = 1 .

(3-1) المستويان (ABF) و (EFH) متقاطعان وفق المستقيم (EF) .

M(x ; y ; z)∈(ABF)∩(EFH) يكافئ $\begin{cases}x=1\\z=2\end{cases}$

2) (1-2) ، (2-2)

- $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ إذن $A(1;0;0)$.
- $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HG}=-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ إذن $G(-1;1;2)$.
- $E(1;0;2)$ و $F(1;1;2)$ إذن $P\left(1;\frac{1}{2};2\right)$.



(3-2) معادلة المستوي

هي أعداد a , b , c ,d و $ax+by+cz+d=0$ من الشكل (APQ)
حقيقية حيث $(a\ ;\ b\ ;\ c\ )\neq(\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ )$.
النقط $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0\ )$, $P(\ 1\ ;\ 1/2\ ;\ 2)$, $Q(0\ ;\ 1/2\ ;\ 0)$ تنتمي
على (APQ) ، إذن إحداثيتها تحقق
معادلة (APQ) أي :

$$\begin{cases}a+d=0\\ a+\frac{b}{2}+2c+d=0\\ \frac{b}{2}+d=0\end{cases} \text{ إذن } \begin{cases}a=-d\\ -d-d+2c+d=0\\ b=-2d\end{cases} \text{ منه } \begin{cases}a=-d\\ b=-2d\\ c=\frac{d}{2}\end{cases}$$

نجد معادلة للمستوي (APQ) : $(-d)x+(-2d)y+\left(\frac{d}{2}\right)z+d=0$

أي $d\left(-x-2y+\frac{z}{2}+1\right)=0$

بماأن $d\neq 0$ فإن $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ و منه $-x-2y+\frac{z}{2}+1=0$

أي $2x+4y-z-2=0$.

$2x+4y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (APQ) .

3) (1-3)، (2-3)

$G\in(APQ)$ يكافئ إحداثيات G تحقق معادلة المستوي (APQ).

لدينا $G(-1\ ;\ 1\ ;\ 2)$ و $-2+4-2-2\neq 0$ إذن $G\notin(APQ)$.

4) $G\notin(APQ)$ إذن المستوي (APQ) لا يشمل المستقيم (AG) ، A هي النقطة المشتركة الوحيدة
بين (APQ) و (AG).

النقط A ، P و Q ليست على استقامة واحدة لا توجد أي نقطة مشتركة للمستقيمين (AG) و (PQ) (لا يوجد أي مستو يشمل (AG) و(PQ) في آن واحد).

التمرين 06

1) $\vec{n}(1;1;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي الذي معادلته $x+y-3z+4=0$.

شرح :

$M(x;y;z)\in(D)$ **يعني** $\overrightarrow{SM}\left(x-1\,;y+2\,;z\right)$ **يوازي** $\vec{n}(1;1;-3)$ أي يوجد عدد حقيقي k

حيث $\overrightarrow{SM} = k\,\vec{n}$ إذن : $\begin{cases} x-1=k \\ y+2=k \\ z=-3k \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=1+k \\ y=-2+k \\ z=-3k \end{cases}$

نضع $k=t+1$ و نجد $\begin{cases} x=1+k=2+t \\ y=-2+k=-1+t \\ z=-3k=-3-3t \end{cases}$

الجواب الصحيح هو **الجواب 4** .

شرح آخر:

نعبر عن إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{SM}$ بدلالة t في كل حالة :

الجواب1	الجواب2	الجواب3	الجواب4
$\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix} t \\ 3-2t \\ -3 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ 1-3t \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 3t \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ -3-3t \end{pmatrix}$

الشعاع الوحيد الذي يوازي $\vec{n}\,(1;1;-3)$ هو الشعاع $\overrightarrow{SM}$ في الجواب 4 :

$\overrightarrow{SM}=(1+t)\,\vec{n}$.

2) الإحداثيات $(x;y;z)$ للنقطة H تقاطع المستقيم (D) و المستوي (P) تحقق :

$\begin{cases} \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases} \\ x+y-3z+4=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases} \\ (2+t)+(-1+t)-3(-3-3t)+4=0 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases} \\ t=-\dfrac{14}{11} \end{cases}$ و نستنتج $\begin{cases} x=\dfrac{8}{11} \\ y=-\dfrac{25}{11} \\ z=\dfrac{9}{11} \end{cases}$

الجواب الصحيح هو **الجواب 4** .

3) المسافة بين النقطة S و المستوي (P) هي : $\dfrac{|1-2-3\times 0+4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}}$ أي $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$.

الجواب الصحيح هو **الجواب 2** .

4) المسافة بين S و (P) أقصر من نصف قطر الكرة ،إذن تقاطع المستوي (P) و الكرة هي الدائرة التي مركزها H (H هي المسقط العمودي لـ : S على (P)) و نصف قطرها $r=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2}$ أي $r=3\sqrt{\frac{10}{11}}$.

الجواب الصحيح هو **الجواب 2** .

التمرين 07

1) القطران (HF) و (EG) للمربع EFGH متعامدان.

المستقيم (EA) يعامد المستوي (EFH) إذن(EA) يعامد المستقيم (HF) المحتواة في (EFH).

المستقيم (HF) الذي يعامد (EG) و(EA) ، يعامد المستوي **(AEG)** (المستوي **(AEG)** يشمل المستقيمين (EG) و(EA))

(HF)يعامد كل مستقيمات المستوي**(AEG)** و بالخصوص(HF) يعامد **(AG).**

2)

(2-1) $\overrightarrow{EA}\bullet\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EA}\bullet\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right)=-EA^2+\overrightarrow{EA}\bullet\overrightarrow{EF}=-a^2+0=-a^2$

لأن $\overrightarrow{EA}$ **و** $\overrightarrow{EF}$ متعامدان .

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}\bullet\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right)=0+EA^2=a^2$

$\overrightarrow{BC}$ يعامد المستوي (AEF) إذن $\overrightarrow{BC}$ يعامد $\overrightarrow{AF}$ و منه $\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{AF}=0$ **.**

(2-2) $\overrightarrow{EC}\bullet\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{AF}=\bullet\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right)=-a^2+a^2+0=0$

إذن $\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{AF}$ متعامدان .

التمرين 08

1) $A_1(X_1;Y_1;Z_1)$ نقطة من (D_1) إذن $\begin{cases}X_1=3-4\alpha\\Y_1=-2+\alpha\\Z_1=-1+\alpha\end{cases}$

$A_2(X_2;Y_2;Z_2)$ نقطة من (D_2) إذن $\begin{cases}X_2=-6\beta\\Y_2=1+\beta\\Z_2=2+2\beta\end{cases}$

إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{A_1A_2}$ هي $\begin{cases} X_2 - X_1 = -3+4\alpha-6\beta \\ Y_2 - Y_1 = 3-\alpha+\beta \\ Z_1 - Z_2 = 3-\alpha+2\beta \end{cases}$

$\overrightarrow{u_1}(-4;1;1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D_1)

$\overrightarrow{u_2}(-6;1;2)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D_2).

المستقيم (A_1A_2) يعامد (D_1) و (D_2) إذا و فقط إذا كان $\begin{cases} \overrightarrow{A_1A_2} \bullet \overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{A_1A_2} \bullet \overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 2 \\ 27\alpha - 41\beta = 27 \end{cases}$ و نجد $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$

نستنتج أن $A_1(-1;-1;0)$ ، $A_1(0;1;2)$ إذن $\overrightarrow{A_1A_2}(1;2;2)$.

المستقيم (Δ) الذي يعامد (D_1) و (D_2) و المستقيم (A_1A_2) الذي يمر بالنقطة $A_1(-1;-1;0)$ و شعاع

توجيهه $\overrightarrow{A_1A_2}(1;2;2)$.

نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء تنتمي إلى المستقيم (Δ) **يعني** $\overrightarrow{A_1M} = t\,\overrightarrow{A_1A_2}$ $(t \in \mathbb{R})$

أي $\begin{cases} x+1 = t \\ y+1 = 2t \\ z-0 = 2t \end{cases}$ أي $\begin{cases} x = -1+t \\ y = -1+2t \\ z = 2t \end{cases}$

$\begin{cases} x = -1+t \\ y = -1+2t \\ z = 2t \end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المطلوب.

2) اقصر مسافة بين المستقيمين (D_1) و (D_2) هي $\left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$.

التمرين 09

1) المثلث BCD قائم في C : نجد $BD = \sqrt{2}$ باستعمال مبرهنة فيتاغورس.

المثلث FBD قائم في B : نجد $FD = \sqrt{3}$ باستعمال مبرهنة فيتاغورس.

نجد بنفس الكيفية أن $BH=\sqrt{3}$.

2) نحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{OF}\bullet\overrightarrow{OH}$ بطريقتين مختلفتين :

● $\overrightarrow{OF}\bullet\overrightarrow{OH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DF}\bullet\overrightarrow{BH}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}\right)\bullet\overrightarrow{BH}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{DB}\bullet\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{BF}\bullet\overrightarrow{BH}\right)$

$\overrightarrow{OF}\bullet\overrightarrow{OH}=\frac{1}{4}\left(-DB^2+BF^2\right)=-\frac{1}{4}$.

● $\overrightarrow{OF}\bullet\overrightarrow{OH}=OF\times OH\times\cos\alpha=\frac{3}{4}\cos\alpha$.

نستنتج أن $\frac{3}{4}\cos\alpha=-\frac{1}{4}$ أي $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ و الحاسبة تعطينا $\alpha\approx 109^\circ$.

3) نبيّن أن $\overrightarrow{FD}$ يعامد شعاعين من المستوي (EGB) :

● نبيّن أن $\overrightarrow{FD}$ يعامد $\overrightarrow{GE}$:

$\overrightarrow{FD}\bullet\overrightarrow{GE}=\left(\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HD}\right)\bullet\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{FG}\bullet\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GH}\bullet\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{HD}\bullet\overrightarrow{GE}$ إذن

$\overrightarrow{FD}\bullet\overrightarrow{GE}=-FG^2+GH^2+0=0$.

● نحسب بنفس الكيفية $\overrightarrow{FD}\bullet\overrightarrow{GB}$ و نجد $\overrightarrow{FD}\bullet\overrightarrow{GB}=0$.

نستنتج أن المستقيم (FD) يعامد المستوي (EGB) .

4) $\overrightarrow{FD}(-1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (EGB) **إذن** (EGB) يقبل معادلة ديكارتية من الشكل $-x+y-z+d=0$. بماأن النقطة $B(1;0;0)$ تنتمي إلى المستوي (EGB) فإن $d=1$. نستنتج أن $-x+y-z+1=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (EGB).

5) المسافة بين النقطة $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ و المستوي (EGB) هي :

$$\frac{\left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

